

Die Berechnung der Sterbeintensität aus den Beobachtungszahlen

INAUGURALDISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER

PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

VORGELEGT DER

PHILOSOPHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER UNIVERSITÄT BASEL

VON

Hans-Peter Meier

aus Meilen



Zürich 1951

Dissertationsdruckerei Leemann AG

Die Berechnung der Sterbeintensität aus den Beobachtungszahlen

INAUGURALDISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER

PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

VORGELEGT DER

PHILOSOPHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT BASEL

VON

Hans-Peter Meier

aus Meilen



Zürich 1951
Dissertationsdruckerei Leemann AG

Genehmigt von der Philosophisch-naturwissenschaftlichen
Fakultät auf Antrag der

Herren Prof. Dr. E. Zwinggi und Prof. Dr. M. Gürtler.

Basel, den 27. Februar 1951

Der Dekan:

A. Ostrowski



MEINEN ELTERN
IN DANKBARKEIT GEWIDMET

Inhalt

Einleitung	7
<i>1. Kapitel: Beziehungen zwischen der Sterbeintensität und der Sterbewahrscheinlichkeit</i>	
§ 1. Ansatz	8
§ 2. Berechnung der Sterbeintensität aus der Sterbewahrscheinlichkeit	11
§ 3. Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeit aus der Sterbeintensität	15
§ 4. Diskussion der in § 2 und § 3 hergeleiteten Formeln	18
<i>2. Kapitel: Berechnung der Sterbeintensität (ohne μ_0) aus den Beobachtungszahlen</i>	
§ 5. Ansatz und Berechnung	22
§ 6. Diskussion der in § 5 hergeleiteten Formeln	26
<i>3. Kapitel: Berechnung von μ_0 aus den Beobachtungszahlen</i>	
§ 7. Ansatz	30
§ 8. Numerische Berechnung von μ_0	34
§ 9. Diskussion der in § 8 berechneten vier Werte für μ_0	36
§ 10. Diskussion weiterer Ansätze für die Berechnung von μ_0	38
Zusammenfassung	45



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit läßt sich wie folgt umschreiben.

1. Herleitung von Beziehungen zwischen der Sterbeintensität und der Sterbewahrscheinlichkeit, wobei gleichzeitig versucht werden soll, Formeln derart zu gewinnen, daß sowohl bei μ wie bei q nur ganzzahlige Altersindizes auftreten.

2. Herleitung der Formeln für die Berechnung der Sterbeintensität aus den Beobachtungszahlen mit Hilfe der unter 1. gefundenen Beziehungen. Im Verlaufe der Arbeit hat es sich dann aber gezeigt, daß diese Formeln für die Berechnung von μ_0 nicht verwendbar sind, woraus sich folgende Notwendigkeit ergibt:

3. Herleitung einer Formel zur Berechnung von μ_0 aus den Beobachtungszahlen.

1. Kapitel: Beziehungen zwischen der Sterbeintensität und der Sterbewahrscheinlichkeit

§ 1. Ansatz

Wir gehen aus von der bekannten Beziehung

$$1 - {}_tq_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+\tau} d\tau}, \quad (1)$$

worin ${}_tq_x$ die Wahrscheinlichkeit für einen x -jährigen, zwischen dem Alter x und $x+t$ zu sterben und $\mu_{x+\tau}$ die Sterbeintensität eines $x+\tau$ -jährigen bedeutet. Beziehung (1) verbindet die Sterbewahrscheinlichkeit mit der Sterbeintensität, ist jedoch nicht geeignet, die eine Größe aus der andern numerisch zu bestimmen. Um (1) der numerischen Auswertung zugänglich zu machen, sind verschiedene Verfahren denkbar; zwei davon werden im folgenden beschrieben.

1. *Verfahren.* Für $t=1$ lautet (1)

$$1 - {}_1q_x = e^{-\int_0^1 \mu_{x+\tau} d\tau}. \quad (2)$$

Unter Verwendung des Mittelwertsatzes setzen wir in (2)

$$\int_0^1 \mu_{x+\tau} d\tau = \mu_{x+1/2} \quad \text{und erhalten}$$

$$1 - {}_1q_x = e^{-\mu_{x+1/2}}. \quad (3)$$

Wird (3) logarithmiert und zugleich der Index transformiert, so folgt

$$\mu_x = -\ln(1 - q_{x-1/2}), \quad (4)$$

oder bei Übergang auf Logarithmen mit der Basis 10

$$\mu_x = -\frac{1}{M} \log(1 - q_{x-1/2}). \quad (5)$$

Entwickeln wir in (4) die rechte Seite in die Reihe, so ist zunächst

$$\mu_x = q_{x-1/2} + \frac{1}{2} q_{x-1/2}^2 + \frac{1}{3} q_{x-1/2}^3 + \dots^1)$$

oder in erster Näherung

$$\mu_x = q_{x-1/2}. \quad (6)$$

2. Verfahren. Gleichung (1) logarithmiert ergibt

$$\ln(1 - q_x) = -\int_0^t \mu_{x+\tau} d\tau;$$

wird sodann nach t differenziert, so folgt

$$\mu_{x+t} = \frac{\frac{d}{dt} {}_t q_x}{1 - {}_t q_x}. \quad (7)$$

Um in (7) den Differentialquotienten der Sterbewahrscheinlichkeit nach der Zeit, d. h. $\frac{d}{dt} {}_t q_x$, durch die Sterbewahrscheinlichkeit selbst darzustellen, stehen zwei Wege offen.

a) Unter der Annahme, daß sich die Todesfälle gleichmäßig über das Jahr verteilen, können wir ${}_t q_x = t {}_1 q_x$ setzen. Dann ist

$$\frac{d}{dt} {}_t q_x = {}_1 q_x;$$

für (7) erhalten wir

$$\mu_{x+t} = \frac{{}_1 q_x}{1 - t {}_1 q_x}. \quad (8)$$

Durch Transformation $x \rightarrow x - 1/2$ und $t \rightarrow 1/2$ geht (8) über in

$$\mu_x = \frac{{}_1 q_{x-1/2}}{1 - \frac{1}{2} {}_1 q_{x-1/2}}. \quad (9)$$

¹⁾ G. Rosmanith: Zwei Kapitel aus der mathematischen Statistik. Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen des Deutschen Vereins für Versicherungswesen in der Tschechoslowakischen Republik. Heft 1, 1922.

b) Um in (7) $\frac{d}{dt} {}_t q_x$ durch ${}_t q_x$ selbst auszudrücken, können wir ${}_t q_x$ numerisch differenzieren. Aus der *Newtonschen* Interpolationsformel

$$f(x+t) = f(x) + \binom{t}{1} \Delta f(x) + \binom{t}{2} \Delta^2 f(x) + \binom{t}{3} \Delta^3 f(x) + \dots \quad (10)$$

folgt

$$f'(x+t) = \Delta f(x) + \frac{2t-1}{2} \Delta^2 f(x) + \frac{3t^2-6t+2}{6} \Delta^3 f(x) + \dots$$

Wird $f(x+t)$ mit ${}_t q_x$ identisch erklärt, so gilt

$${}_t q'_x = \Delta {}_0 q_x + \frac{2t-1}{2} \Delta^2 {}_0 q_x + \frac{3t^2-6t+2}{6} \Delta^3 {}_0 q_x + \dots$$

und für $t=1$, wenn vierte und höhere Differenzen vernachlässigt werden,

$${}_1 q'_x = \frac{1}{6} (-2 {}_0 q_x - 3 {}_1 q_x + 6 {}_2 q_x - 3 {}_3 q_x).$$

Wird in den Indizes um „1“ zurückgegangen, so folgt

$${}_0 q'_x = \frac{1}{6} (-2 {}_{-1} q_x - 3 {}_0 q_x + 6 {}_1 q_x - 3 {}_2 q_x), \quad (11)$$

wobei ${}_0 q_x = 0$. Für $t=0$ lautet (7)

$$\mu_x = \frac{{}_0 q'_x}{1 - {}_0 q_x} = {}_0 q'_x$$

und folglich wegen (11)

$$\mu_x = \frac{1}{6} (-2 {}_{-1} q_x + 6 {}_1 q_x - 3 {}_2 q_x). \quad (12)$$

Zur Ergänzung sei darauf hingewiesen, daß sich (12) auch durch elementare Umformung aus der bekannten Beziehung

$$\mu_x = \frac{1}{6 l_x} (2 l_{x-1} + 3 l_x - 6 l_{x+1} + l_{x+2})$$

gewinnen läßt.

§ 2. Berechnung der Sterbeintensität aus der Sterbewahrscheinlichkeit

In einer weitem Stufe haben wir zu versuchen, die Sterbeintensität durch die Sterbewahrscheinlichkeit und umgekehrt derart auszudrücken, daß bei beiden Größen nur ganzzahlige Altersindizes auftreten. Wir beginnen mit der Darstellung von μ_x durch q_x ; den Ausgangspunkt bilden die Beziehungen (5), (6), (9) und (12), woraus sich insgesamt fünf Formeln gewinnen lassen.

1. *Formel.* Wird zunächst in (5) für $q_{x-1/2}$ das arithmetische Mittel von q_x und q_{x-1} , d. h.

$$q_{x-1/2} = \frac{q_{x-1} + q_x}{2} \quad (13)$$

und für $\frac{1}{M}$ der Zahlenwert 2,3025851 eingeführt, so ist

$$\mu_x = -2,3025851 \log \left(1 - \frac{q_{x-1} + q_x}{2} \right). \quad (14)$$

2. *Formel.* Aus (6) geht nach Einsetzung von (13) die folgende außerordentlich einfache Darstellung

$$\mu_x = \frac{q_{x-1} + q_x}{2} \quad (15)$$

hervor.

Wird in (8) $t=1$ gesetzt, so folgt

$$\mu_x = \frac{q_x}{p_x};$$

diese Formel ist indessen unbrauchbar, wie numerische Berechnungen bestätigen.

3. *Formel.* Bei Betrachtung von (9) ist es naheliegend, für $q_{x-1/2}$ ebenfalls (13) zu verwenden, was auf die Gleichung

$$\mu_x = 2 \frac{q_{x-1} + q_x}{4 - q_{x-1} - q_x} \quad (16)$$

führt.

4. *Formel.* Aus (9) läßt sich eine weitere Formel herleiten, indem dort zunächst

$$q_{x^{-1/2}} = \frac{l_{x^{-1/2}} - l_{x^{+1/2}}}{l_{x^{-1/2}}}$$

eingeführt wird. Dann ist

$$\mu_x = \frac{l_{x^{-1/2}} - l_{x^{+1/2}}}{\frac{l_{x^{-1/2}} + l_{x^{+1/2}}}{2}};$$

wenn noch $l_x = \frac{l_{x^{-1/2}} + l_{x^{+1/2}}}{2}$ gesetzt wird, so folgt

$$\mu_x = \frac{l_{x^{-1/2}} - l_{x^{+1/2}}}{l_x} \cdot 2)$$

Sei weiter $l_{x^{-1/2}} = \frac{l_{x-1} + l_x}{2}$ und $l_{x^{+1/2}} = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$; dann wird

$$\underline{\mu_x = \frac{l_{x-1} - l_x}{2l_x} + \frac{l_x - l_{x+1}}{2l_x} = \frac{1}{2} \left(\frac{q_{x-1}}{1 - q_{x-1}} + q_x \right)}. \quad (17)$$

Gleichung (17) läßt sich auch völlig unabhängig von den bisherigen Betrachtungen gewinnen. Wir wollen diese Herleitung durchführen, da wir bei dieser Gelegenheit auf eine Formel stoßen werden, deren wir in § 3 bedürfen.

Aus der Differenzenrechnung ist bekannt, daß

$$(1 + \Delta)f(x) = e^D f(x) = \left(1 + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots\right) f(x),^3) \quad (18)$$

wobei D als Differentialoperator und Δ als Differenzenoperator definiert ist.

Wird für $f(x)$ die Überlebensordnung l_x eingesetzt und beachtet, daß

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = -q_x \quad \text{und} \quad \frac{l'_x}{l_x} = -\mu_x,$$

so folgt aus (18)

²⁾ Vgl. auch Formel (34).

³⁾ *E. Zwinggi*: Zur numerischen Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeit aus der Sterbeintensität. *Experientia*, vol. 6, 1950.

$$q_x = \mu_x - \frac{1}{2!} \frac{l_x''}{l_x} - \frac{1}{3!} \frac{l_x'''}{l_x} - \dots \quad (19)$$

Wird beim zweiten Glied abgebrochen, so stehen der weiteren Behandlung dieser Gleichung zwei Wege offen:

a) Man kann sich leicht überzeugen, daß

$$\frac{l_x''}{l_x} = \mu_x^2 - \mu_x'$$

und folglich für (19)

$$q_x = \mu_x - \frac{1}{2!} (\mu_x^2 - \mu_x') \quad (20)$$

gilt. Dies ist eine *Riccati*sche Differentialgleichung vom Typus

$$y' = y^2 - 2y + 2f(x).$$

Die Theorie der Differentialgleichungen⁴⁾ zeigt nun aber, daß sich die Lösung nicht ohne weiteres in geschlossener Form angeben läßt. Auch der Versuch, diese Differentialgleichung in eine solche zweiter Ordnung überzuführen, muß scheitern, da die Substitution, die dies ermöglichen würde

$$y = -\frac{d \ln u}{dx} = -\frac{u'}{u}$$

d. h.

$$\mu_x = -\frac{l_x'}{l_x}$$

uns zum Ausgangspunkt (19) zurückführt. Der Weg a) bringt uns folglich nicht an das gewünschte Ziel. Er wurde dennoch begangen, damit in § 3 auf (20) zurückgegriffen werden kann.

b) Durch zweimalige Differentiation der *Gauß*schen Interpolationsformel

$$\begin{aligned} f(x+t) = f(x) + \binom{t}{1} \Delta f(x) + \binom{t}{2} \Delta^2 f(x-1) + \\ + \binom{t+1}{3} \Delta^3 f(x-1) + \binom{t+1}{4} \Delta^4 f(x-2) + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

⁴⁾ L. Bieberbach: Differentialgleichungen. Springer Berlin 1930. Dritte Auflage.

folgt bei Vernachlässigung vierter und höherer Differenzen

$$f''(x+t) = \Delta^2 f(x-1) + t \Delta^3 f(x-1).$$

Für $t=0$ und $f(x)=l_x$ ist

$$l_x'' = \Delta^2 l_{x-1} = l_{x+1} - 2l_x + l_{x-1}$$

und folglich

$$\frac{l_x''}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x} - \frac{2l_x}{l_x} + \frac{l_{x-1}}{l_x} = -\frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{x-1} - l_x}{l_x} = -q_x + \frac{q_{x-1}}{p_{x-1}};$$

dies in (19) eingeführt ergibt

$$q_x = \mu_x - \frac{1}{2!} \left(\frac{q_{x-1}}{p_{x-1}} - q_x \right)$$

$$\text{d. h.} \quad \mu_x = \frac{1}{2} \left(\frac{q_{x-1}}{1 - q_{x-1}} + q_x \right), \quad (17)$$

womit (17) von neuem entstanden ist.

5. *Formel.* Aus (12) gelangt man durch die Umformungen

$$-1q_x = \frac{l_x - l_{x-1}}{l_x} = -\frac{q_{x-1}}{1 - q_{x-1}}$$

und

$$2q_x = \frac{l_x - l_{x+2}}{l_x} = q_x + q_{x+1}(1 - q_x)$$

auf die Beziehung

$$\mu_x = \frac{1}{6} \left(2 \frac{q_{x-1}}{1 - q_{x-1}} + q_{x+1} q_x + 5 q_x - q_{x+1} \right). \quad (22)$$

Bei dieser Gelegenheit sei darauf hingewiesen, daß wir für (10) die Formel (21) verwenden können, was an Stelle von (12) die Gleichung

$$\mu_x = \frac{1}{6} (-2q_x - 6 {}_{-1}q_x + 2 {}_1q_x)$$

und durch geeignete Umformung von ${}_2q_x$ und ${}_{-1}q_x$ anstatt (22) die Beziehung

$$\mu_x = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{(1-q_{x-1})(1-q_{x-2})} + 6 \frac{q_{x-1}}{1-q_{x-1}} + 2q_x \right) \quad (23)$$

ergibt, deren Genauigkeitsgrad sich aber im wesentlichen mit demjenigen von (22) deckt.

Nachdem es mit den fünf Formeln (14) bis (17) und (22) gelungen ist, μ durch q derart auszudrücken, daß in beiden Größen nur ganzzahlige Altersindizes auftreten, wollen wir uns im folgenden Paragraphen dem Umkehrproblem, d. h. der Darstellung von q_x durch μ_x zuwenden.

§ 3. Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeit aus der Sterbeintensität

Die Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeit aus der Sterbeintensität ist bis heute kaum untersucht worden. Folglich dürfte es von Interesse sein, eingehender auf dieses Problem einzutreten. Wir gehen dabei am besten von den Beziehungen (3) und (20) aus.

1. *Formel.* Aus der Infinitesimalrechnung ist bekannt, daß

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

folglich ist nach (3) auch

$$p_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu_{x+1/2}}{n} \right)^n.$$

Wird der Grenzwert durch das n . Glied approximiert, so gilt

$$p_x = \left(1 - \frac{\mu_{x+1/2}}{n} \right)^n. \quad (24)$$

⁵⁾ Wird nach $\mu_{x+1/2}$ aufgelöst und der Index transformiert, so gelangt man unter Verwendung von (13) auf die Gleichung $\mu_x = n \left(1 - \sqrt[n]{\frac{2-q_{x-1}-q_x}{2}} \right)$. Damit ist eine weitere Beziehung zur Lösung des in § 2 gestellten Problems gewonnen. Sie ist aber für praktische Berechnungen weniger geeignet als die in § 2 gefundenen Formeln.

Analog zu (13) sei

$$\mu_{x+1/2} = \frac{\mu_x + \mu_{x+1}}{2}. \quad (25)$$

Wenn wir jetzt (24) logarithmieren, so geht diese Beziehung unter Verwendung von (25) über in

$$\log p_x = n \cdot \log \left(1 - \frac{\mu_x + \mu_{x+1}}{2n} \right). \quad (26)$$

2. Formel. Aus (24) resultiert für den Spezialfall $n = 1$

$$q_x = \mu_{x+1/2}$$

d.h. Formel (6), die sich infolge von (25) auch schreiben läßt als

$$q_x = \frac{\mu_x + \mu_{x+1}}{2}. \quad (27)$$

3. Formel. Durch Reihenentwicklung geht (3) über in

$$q_x = \mu_{x+1/2} - \frac{\mu_{x+1/2}^2}{2!} + \frac{\mu_{x+1/2}^3}{3!} - \dots \quad (6)$$

und wenn beim zweiten Glied abgebrochen wird,

$$q_x = \mu_{x+1/2} \left(1 - \frac{\mu_{x+1/2}}{2} \right). \quad (6)$$

Diese Beziehung folgt ebenfalls aus (9), sofern nach $q_{x-1/2}$ aufgelöst und der Index transformiert wird. Dann wird nämlich

$$q_x = \frac{\mu_{x+1/2}}{1 + \frac{1}{2} \mu_{x+1/2}}. \quad (28)$$

Unter Anwendung von (25) geht sodann (28) über in die zu (16) analoge Beziehung

$$q_x = 2 \frac{\mu_x + \mu_{x+1}}{4 + \mu_x + \mu_{x+1}}. \quad (29)$$

⁶⁾ G. Rosmanith: Zwei Kapitel aus der mathematischen Statistik. Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen des Deutschen Vereins für Versicherungswesen in der Tschechoslowakischen Republik. Heft 1, 1922.

4. *Formel.* Wird in der Newtonschen Interpolationsformel (10) für $f(x) = \mu_x$ und $t = \frac{1}{2}$ gesetzt, so ist

$$\mu_{x+1/2} = \mu_x + \frac{1}{2}(\mu_{x+1} - \mu_x) - \frac{1}{8}(\mu_{x+2} - 2\mu_{x+1} + \mu_x) + \dots;$$

wird beim dritten Glied abgebrochen, so folgt

$$\mu_{x+1/2} = \frac{3\mu_x + 6\mu_{x+1} - \mu_{x+2}}{8}$$

und daraus nach (28)

$$q_x = 2 \frac{3(\mu_x + 2\mu_{x+1}) - \mu_{x+2}}{16 + 3(\mu_x + 2\mu_{x+1}) - \mu_{x+2}}. \quad (30)$$

Unter analoger Verwendung der Gaußschen Interpolationsformel (21) geht (28) über in

$$q_x = 2 \frac{3(\mu_{x+1} + 2\mu_x) - \mu_{x-1}}{16 + 3(\mu_{x+1} + 2\mu_x) - \mu_{x-1}}.$$

Da die Genauigkeit dieser Formel mit derjenigen von (30) übereinstimmt, soll künftig lediglich (30) weiter verfolgt werden.

5. *Formel.* Ferner ist denkbar, in (20) μ_x' unter Verwendung einer Formel für die numerische Differentiation darzustellen. Aus (10) folgt

$$f'(x+t) = \Delta f(x) + \frac{2t-1}{2} \Delta^2 f(x) + \frac{3t^2-6t+2}{6} \Delta^3 f(x) + \dots$$

Wird dann $f(x)$ mit μ_x identisch erklärt, so ist für $t=0$ und Vernachlässigung vierter und höherer Differenzen

$$\mu_x' = \Delta \mu_x - \frac{1}{2} \Delta^2 \mu_x + \frac{1}{3} \Delta^3 \mu_x$$

und somit für (20)

$$q_x = \frac{\mu_x(1 - 6\mu_x) + 9(2\mu_{x+1} - \mu_{x+2}) + 2\mu_{x+3}}{12}. \quad (31)$$

Wird nicht (10), sondern (21) differenziert, so folgt gleichlautend zu (31) die Gleichung

$$q_x = \frac{3\mu_x(3-2\mu_x) + 6\mu_{x+1} - \mu_{x+2} - 2\mu_{x-1}}{12},$$

deren Genauigkeitsgrad sich mit demjenigen von (31) deckt, so daß wir uns für die Zukunft nur mit (31) zu befassen brauchen.

Die numerischen Berechnungen im folgenden Paragraphen werden uns über die Größenordnung der Fehler der bisher gewonnenen Formeln orientieren.

§ 4. Diskussion der in § 2 und § 3 hergeleiteten Formeln

Die Prüfung vorerst der in § 2 hergeleiteten Formeln (14) bis (17) und (22) auf ihre Genauigkeit hin setzt die Kenntnis des theoretischen Wertes von μ_x voraus. Da die Sterbeintensitäten der Gruppenversicherungstarife MG 1948 nach der Formel

$$\mu_x = a + b c^x \quad (32)$$

berechnet vorliegen, sollen sie uns als theoretische Werte für μ_x dienen. Werden der eben erwähnten Sterbetafel die Sterbewahrscheinlichkeiten entnommen und in die Formeln (14) bis (17) und (22) eingesetzt, so ergeben sich für die Sterbeintensitäten Werte, deren Abweichungen vom theoretischen Wert in Tabelle 1 zusammengestellt sind.

Während die Formeln (14), (16), (17) und (22) bis ins hohe Alter gute Ergebnisse zeitigen, trifft dies für die einfach gebaute Beziehung (15) nicht zu. Immerhin ist festzustellen, daß erst bei $x > 65$ der Fehler die 1% Grenze überschreitet.

Liegt uns daran, μ_x so exakt wie nur möglich zu berechnen, so werden wir uns

$$\begin{array}{ll} \text{für } x \leq 50 & \text{der Formel (15),} \\ \text{für } 50 < x \leq 90 & \text{der Formel (16), (17) oder (22),} \\ \text{für } 90 < x \leq 95 & \text{der Formel (22),} \\ \text{für } 95 < x & \text{der Formel (14)} \end{array}$$

bedienen.

In der Zusammenfassung dieser Arbeit sind diese Formeln nach verschiedenen Gesichtspunkten geordnet.

Tabelle 1. Relative Abweichungen der nach den Formeln (14) bis (17) und (22) errechneten Sterbeintensitäten in Promille

x	(14)	(15)	(16)	(17)	(22)
5	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0
40	0	0	0	+ 3,4	0
45	+ 2,5	0	+ 2,5	+ 2,5	0
50	+ 1,7	0	+ 1,7	+ 1,7	0
55	+ 2,2	- 2,2	+ 2,2	+ 2,2	0
60	+ 1,4	- 5,5	+ 1,4	+ 1,4	0
65	+ 1,7	- 9,9	+ 1,7	+ 0,4	0
70	+ 1,8	- 17,1	+ 1,6	0	0
75	+ 1,8	- 29,0	+ 1,3	- 0,8	+ 0,2
80	+ 1,6	- 48,4	+ 0,7	- 1,7	0
85	+ 1,5	- 79,2	- 0,9	- 2,0	- 0,1
90	+ 1,4	- 127,6	- 5,2	+ 0,7	- 0,5
91	+ 1,3	- 140,0	- 6,8	+ 2,1	- 0,6
92	+ 1,3	- 153,4	- 8,6	+ 4,1	- 0,6
93	+ 1,2	- 167,9	- 10,8	+ 6,7	- 0,4
94	+ 1,2	- 183,6	- 13,5	+ 10,1	- 0,1
95	+ 1,1	- 200,5	- 16,8	+ 14,4	+ 0,4
96	+ 1,1	- 218,6	- 20,7	+ 20,1	+ 1,2
97	+ 1,0	- 238,0	- 25,5	+ 27,3	+ 2,6
98	+ 0,9	- 258,7	- 31,3	+ 36,5	+ 4,6
99	+ 0,8	- 280,7	- 38,3	+ 48,2	+ 7,5
100	+ 0,7	- 304,0	- 46,7	+ 63,0	+ 12,1

Nachdem die Fehlergröße der in § 2 hergeleiteten Beziehungen untersucht worden ist, soll der Genauigkeitsgrad der in § 3 gewonnenen Formeln näher geprüft werden. Zu diesem Zwecke setzen wir die den Gruppenversicherungstarifen MG 1948 entnommenen Sterbeintensitäten in die Formeln (26), (27) und (29) bis (31) ein⁷⁾. Die so erhaltenen Sterbewahrscheinlichkeiten vergleichen wir mit

⁷⁾ In Formel (26) wurde $n = 1$ gesetzt für $x \leq 49$
 $n = 50$ gesetzt für $50 \leq x \leq 80$
 $n = 500$ gesetzt für $81 \leq x$.

den theoretischen Werten für q_x , die wir ebenfalls den Grundlagen für Gruppenversicherungen entnehmen können.

Tabelle 2. Relative Abweichungen der nach den Formeln (26), (27) und (29) bis (31) errechneten Sterbewahrscheinlichkeiten in Promille

x	(26)	(27)	(29)	(30)	(31)
5	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	- 3,4
45	+ 2,4	+ 2,4	0	- 2,4	- 2,4
50	0	+ 3,2	0	0	- 1,6
55	+ 2,1	+ 5,2	0	0	- 1,0
60	+ 0,7	+ 8,6	+ 1,3	- 0,7	- 0,7
65	+ 2,1	+ 13,2	+ 0,8	- 0,4	- 0,8
70	+ 1,3	+ 20,9	+ 1,0	- 0,3	0
75	+ 1,4	+ 34,0	+ 1,1	- 0,2	+ 0,8
80	+ 1,9	+ 56,0	+ 1,8	+ 0,5	+ 1,9
81	+ 1,8	+ 61,9	+ 1,9	+ 0,6	+ 1,9
82	+ 0,8	+ 68,6	+ 2,2	+ 0,9	+ 2,1
83	+ 1,0	+ 76,0	+ 2,5	+ 1,2	+ 2,2
84	+ 0,3	+ 84,1	+ 2,8	+ 1,6	+ 2,1
85	+ 0,8	+ 93,1	+ 3,2	+ 2,0	+ 2,0
86	+ 2,2	+ 103,3	+ 3,8	+ 2,5	+ 1,9
87	+ 1,6	+ 114,5	+ 4,3	+ 3,2	+ 1,5
88	+ 0,6	+ 127,0	+ 5,1	+ 3,9	+ 0,9
89	+ 1,3	+ 141,0	+ 6,0	+ 4,8	+ 0,1
90	+ 1,3	+ 156,7	+ 7,2	+ 6,0	- 1,1
91	+ 0,8	+ 174,1	+ 8,5	+ 7,3	- 2,7
92	+ 1,2	+ 193,6	+ 10,0	+ 8,9	- 5,0
93	+ 0,8	+ 215,4	+ 11,9	+ 10,8	- 8,0
94	+ 1,0	+ 239,8	+ 14,1	+ 13,0	- 12,0
95	+ 1,2	+ 267,1	+ 16,8	+ 15,7	- 17,2
96	+ 1,2	+ 297,9	+ 20,0	+ 18,9	- 24,1
97	+ 1,2	+ 332,4	+ 23,8	+ 22,7	- 33,0
98	+ 0,9	+ 371,2	+ 28,2	+ 27,2	- 44,5
99	+ 0,8	+ 414,9	+ 33,5	+ 32,4	- 59,4
100	+ 1,1	+ 464,3	+ 39,6	+ 38,6	- 78,5

Die Abweichungen der errechneten Werte vom theoretischen Wert finden sich in Tabelle 2 zusammengestellt.

Aus Tabelle 2 ist zu ersehen, daß die mit (26), (29), (30) und (31) berechneten Werte in sämtlichen Altern mit der theoretischen Sterbewahrscheinlichkeit gut übereinstimmen. Gleichung (31) dürfte für praktische Berechnungen ausscheiden, da sie komplizierter gebaut ist als (29) oder (30), aber trotzdem keine wesentlich besseren Ergebnisse zeitigt. Beziehung (27) ist, analog zu (15), wohl in den untern, nicht aber in den obern Altersstufen verwendbar; Formel (26) hingegen liefert bis in die höchsten Altersklassen einen ausgezeichneten Näherungswert für die Sterbewahrscheinlichkeit. Dabei spielt aber die Wahl von n , mit andern Worten die numerische Auswertung dieser Formel eine große Rolle. Erinnern wir uns der Beziehung (24), die wir aus (3) dadurch gewonnen haben, daß wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu_{x+1/2}}{n}\right)^n \quad \text{durch} \quad \left(1 - \frac{\mu_{x+1/2}}{n}\right)^n$$

approximierten, so werden wir entscheiden müssen, wie groß n zu wählen ist.

Während für die Alter $x \leq 50$ mit $n = 1$, mit andern Worten mit Formel (27), eine sehr gute Übereinstimmung mit der theoretischen Sterbewahrscheinlichkeit nachgewiesen werden kann, ist n für die höhern Altersstufen bedeutend größer zu wählen. Den Berechnungen der Werte in Tabelle 2 wurde

$$n = 50 \text{ für } 50 \leq x \leq 80 \text{ und}$$

$$n = 500 \text{ für } 81 \leq x$$

zu Grunde gelegt. Diese Wahl von n hat zur Folge, daß die Abweichungen sogar für die Alter $x > 80$ durchwegs um 1‰ herum liegen, folglich für diese hohen Altersklassen als verschwindend klein zu bezeichnen sind.

Würde in Formel (26) auch für die Alter $x < 80$ mit $n = 500$ gerechnet, so ließe sich bei der numerischen Berechnung, die siebenstellige Logarithmen erfordert, der Logarithmus des Faktors $1 - \frac{\mu_x + \mu_{x+1}}{1000}$ mit nicht mehr genügender Genauigkeit aus der

Tafel herauslesen⁸⁾. Deshalb wurde in den Altern $50 \leq x \leq 80$ für n ein brauchbarer Wert zwischen 1 und 500, nämlich $n = 50$ gewählt.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Sterbewahrscheinlichkeit aus der Sterbeintensität mit größter Genauigkeit errechnet werden kann, wenn man sich

für $x \leq 44$ der Formel (27),

$45 \leq x \leq 80$ der Formel (29) oder (30),

$80 < x$ der Formel (26)

bedient.

An dieser Stelle sei nochmals auf die Formelzusammenstellung in der Zusammenfassung verwiesen.

2. Kapitel. Berechnung der Sterbeintensität (ohne μ_0) aus den Beobachtungszahlen

§ 5. Ansatz und Berechnung

Zur Herleitung von Beziehungen zur unmittelbaren Berechnung der Sterbeintensität aus den Beobachtungszahlen gehen wir am besten aus von der üblichen Formel zur Bestimmung der Sterbewahrscheinlichkeit, nämlich von

$$q_x = \frac{2 T_x}{L_x + L_{x+1} + T_x} {}^9); \quad (33)$$

⁸⁾ Aus demselben Grunde darf in den oberen Altersstufen n nicht zu groß (also nicht z. B. $n = 5000$) gewählt werden. Es ist übrigens sinnlos, n sehr groß zu wählen, da selbst die Beziehung $p_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu_{x+1/2}}{n}\right)^n$ die Sterbewahrscheinlichkeit (resp. p_x) nur approximiert, weil nämlich $\int_0^1 \mu_{x+\tau} d\tau = \mu_{x+1/2}$ gesetzt wurde. Andererseits darf man n in den höchsten Altersklassen auch nicht zu klein ansetzen; $n = 50$ z. B. befriedigt für $x > 80$ nicht.

⁹⁾ E. Zwinggi: Versicherungsmathematik. Birkhäuser 1945.

darin bedeuten

L_x = Bestand der x -jährigen zu Beginn des Beobachtungsjahres

L_{x+1} = Bestand der $x+1$ -jährigen am Ende des Beobachtungsjahres

T_x = Anzahl der im Beobachtungsjahr infolge Tod ausgeschiedenen Personen.

Wir ziehen sodann Gleichung (9) heran und ersetzen darin die Sterbewahrscheinlichkeit durch (33); derart erhalten wir als direkte Beziehung zwischen der Sterbeintensität und den Beobachtungszahlen die Gleichung

$$\mu_x = \frac{\frac{2 T_{x-1/2}}{L_{x-1/2} + L_{x+1/2} + T_{x-1/2}}}{1 - \frac{1}{2} \frac{2 T_{x-1/2}}{L_{x-1/2} + L_{x+1/2} + T_{x-1/2}}} = \frac{T_{x-1/2}}{\frac{L_{x-1/2} + L_{x+1/2}}{2}};$$

wenn noch $L_x = \frac{L_{x-1/2} + L_{x+1/2}}{2}$ gesetzt wird, so folgt

$$\mu_x = \frac{T_{x-1/2}}{L_x}. \quad (34)$$

Diese Formel ist gekennzeichnet durch ihren äußerst einfachen Bau und, wie die numerischen Berechnungen in § 6 bestätigen werden, durch ihren hohen Genauigkeitsgrad. Nachteilig wirkt sich allerdings aus, daß (34) die Berechnung von μ_x nur gestattet, wenn die Todeszahlen nach den Altern $x-1/2$ ausgezählt vorliegen. Um gleichwohl für die Todeszahlen mit ganzzahligen Altersindizes die Möglichkeit der Berechnung zu erhalten, muß $T_{x-1/2}$ geeignet interpoliert werden. Nachfolgend wollen wir einige Möglichkeiten beschreiben.

1. Lineare Interpolation

Bei Betrachtung von (34) liegt es nahe, $T_{x-1/2}$ durch das arithmetische Mittel aus T_{x-1} und T_x zu ersetzen, was auf die einfach gebaute Beziehung

$$\mu_x = \frac{T_{x-1} + T_x}{2 L_x} \quad (35)$$

führt.

2. Interpolation durch Parabel höheren Grades

a) Wird in der *Newtonschen* Interpolationsformel (10) $f(x)$ mit T_{x-1} identisch erklärt und $t=1/2$ gesetzt, so muß offenbar

$$T_{x-1/2} = T_{x-1} + \frac{1}{2}(T_x - T_{x-1}) - \frac{1}{8}(T_{x+1} - 2T_x + T_{x-1}) + \\ + \frac{1}{16}(T_{x+2} - 3T_{x+1} + 3T_x - T_{x-1}) - + \dots$$

gelten. Unter Verwendung der drei ersten Terme ist

$$T_{x-1/2} = \frac{3T_{x-1} + 6T_x - T_{x+1}}{8}$$

und folglich für (34)

$$\mu_x = 0,125 \frac{3T_{x-1} + 6T_x - T_{x+1}}{L_x}. \quad (36)$$

Durch zusätzliche Einführung des vierten Gliedes resultiert die in ihrem Bau kompliziertere Formel

$$\mu_x = 0,0625 \frac{5(3T_x + T_{x-1} - T_{x+1}) + T_{x+2}}{L_x}. \quad (37)$$

b) Setzen wir in der *Gaußschen* Interpolationsformel (21) $f(x) = T_{x-1}$ und $t=1/2$, so ist

$$T_{x-1/2} = T_{x-1} + \frac{1}{2}(T_x - T_{x-1}) - \frac{1}{8}(T_x - 2T_{x-1} + T_{x-2}) - \\ - \frac{1}{16}(T_{x+1} - 3T_x + 3T_{x-1} - T_{x-2}) \dots$$

Unter Verwendung der ersten drei Glieder wird

$$\mu_x = 0,125 \frac{3T_x + 6T_{x-1} - T_{x-2}}{L_x} \quad (38)$$

und für vier Terme

$$\mu_x = 0,0625 \frac{9(T_x + T_{x-1}) - T_{x-2} - T_{x+1}}{L_x}. \quad (39)$$

c) Führen wir die zu a) und b) analoge Berechnung durch mit der *Stirlingschen* Interpolationsformel¹⁰⁾ unter Verwendung ihrer drei ersten Glieder, so gewinnen wir von neuem die Beziehung (38).

Wird die *Besselsche* Interpolationsformel¹⁰⁾ mit ihren ersten drei Gliedern oder die Interpolationsformel von *Everett*¹⁰⁾ mit vier¹¹⁾ Termen verwendet, so stößt man in beiden Fällen auf (39).

Damit wollen wir es bei den aus (9) resp. (34) entwickelten Beziehungen bewenden lassen.

Einer Abklärung bedarf noch die Frage, ob sich die übrigen, im ersten Kapitel gewonnenen Gleichungen (5), (6), (17) und (22) bei Ersetzen von q_x durch (33) in zweckdienliche Formeln zur Berechnung der Sterbeintensität aus den Beobachtungszahlen überführen lassen.

Einmal ist festzustellen, daß aus (6) und (17) keine einfach gebauten und in bezug auf die Genauigkeit an die Formel (38) heranreichenden Beziehungen hergeleitet werden können. Früher ist nachgewiesen worden, daß die aus (5) entstandene Gleichung (14) die Berechnung von μ_x aus q_x für $x \geq 95$ mit größter Genauigkeit gestattet; setzen wir (33) in (5) ein, so erhalten wir zunächst

$$\mu_x = -2,3025851 \log \left(1 - \frac{2 T_{x-1/2}}{L_{x-1/2} + L_{x+1/2} + T_{x-1/2}} \right)$$

und durch arithmetische Mittelbildung, d. h. $T_{x-1/2} = \frac{T_x + T_{x-1}}{2}$ und $L_{x-1/2} + L_{x+1/2} = 2 L_x$ gesetzt, die Formel

$$\mu_x = -2,3025851 \log \left(\frac{4 L_x - T_{x-1} - T_x}{4 L_x + T_{x-1} + T_x} \right). \quad (40)$$

Gleichung (40) versagt indessen in den höchsten Altersstufen gänzlich.

Schließlich geht Beziehung (22) unter Verwendung von (33) in die an sich brauchbare, leider aber sehr umständliche Formel

$$\mu_x = \frac{1}{6} \left(\frac{4 T_{x-1}}{L_{x-1} + L_x - T_{x-1}} + \frac{10 T_x}{L_x + L_{x+1} + T_x} - \frac{2 T_{x+1}}{L_{x+1} + L_{x+2} + T_{x+1}} + \right. \\ \left. + 4 \frac{T_x}{L_x + L_{x+1} + T_x} \cdot \frac{T_{x+1}}{L_{x+1} + L_{x+2} + T_{x+1}} \right)$$

¹⁰⁾ *Whittaker and Robinson: The Calculus of observations. 1926.*

¹¹⁾ Aus Symmetriegründen diesmal vier Glieder.

über. Es ist indessen möglich, die letzte Gleichung zu vereinfachen. Zunächst schreiben wir

$$\mu_x = \frac{1}{3} \left[\frac{2 T_{x-1}}{L_{x-1} + L_x - T_{x-1}} + \frac{5 T_x}{L_x + L_{x+1} + T_x} + \frac{T_{x+1}}{L_{x+1} + L_{x+2} + T_{x+1}} \left(\frac{2 T_x}{L_x + L_{x+1} + T_x} - 1 \right) \right];$$

darauf kann das letzte Glied in der eckigen Klammer in die Form gebracht werden

$$\frac{T_{x+1}}{L_{x+1} + L_{x+2} + T_{x+1}} \left(\frac{2 T_x}{L_x + L_{x+1} + T_x} - 1 \right) = \frac{T_{x+1}}{L_x + L_{x+1} + T_x} \cdot \frac{2 T_x - L_x - L_{x+1} - T_x}{L_{x+1} + L_{x+2} + T_{x+1}}$$

und damit

$$\mu_x = \frac{1}{3} \left[\frac{2 T_{x-1}}{L_{x-1} + L_x - T_{x-1}} + \frac{1}{L_x + L_{x+1} + T_x} \left(5 T_x - T_{x+1} \frac{L_x + L_{x+1} - T_x}{L_{x+1} + L_{x+2} + T_{x+1}} \right) \right];$$

schließlich wird approximiert

$$\frac{L_x + L_{x+1} - T_x}{L_{x+1} + L_{x+2} + T_{x+1}} = 1$$

so daß folgt

$$\mu_x = \frac{1}{3} \left(\frac{2 T_{x-1}}{L_{x-1} + L_x - T_{x-1}} + \frac{5 T_x - T_{x+1}}{L_x + L_{x+1} + T_x} \right). \quad (41)$$

Gleichung (41) gibt, wie die Untersuchungen im folgenden Paragraphen bestätigen werden, gute Resultate. Da die wesentlich einfacher gebauten Formeln (36) und (38) hinreichende Genauigkeit haben, dürfte (41) für die Berechnung von μ_x meistens ausscheiden.

§ 6. Diskussion der in § 5 hergeleiteten Formeln

Um Aufschluß über die Fehlergröße vorerst der Formel (34) zu gewinnen, bedürfen wir der Größe $T_{x-1/2}$, die wir für unser praktisches Beispiel folgendermaßen konstruieren. Gleichung (1) läßt sich für einen beliebigen Ausgangsbestand L_x schreiben als

$$L_{x+t} = L_x e^{-\int_0^t \mu_{x+\tau} d\tau}.$$

Sei mit Rücksicht auf die Tafel MG 1948 $\mu_{x+\tau} = a + b c^{x+\tau}$ und $t = 1/2$ gesetzt; dann ist

$$L_{x+1/2} = L_x e^{-\int_0^{1/2} (a + b c^{x+\tau}) d\tau} = L_x e^{-\frac{a}{2} - \frac{b(c^{1/2}-1)}{\ln c} c^x}$$

oder mit den entsprechenden Parametern der Tafel MG 1948

$$L_{x+1/2} = L_x 0,99945 \frac{1}{(1,000014)^{c^x}}.$$

Diese Beziehung gestattet die Ermittlung von $L_{x+1/2}$ bzw. $L_{x-1/2}$. Somit ist die Berechnung der benötigten Todeszahlen aus $T_{x-1/2} = L_{x-1/2} - L_{x+1/2}$ möglich. Damit läßt sich die Fehlergröße der Formel (34) genau prüfen; die Ergebnisse sind in Tabelle 3 zusammengefaßt.

Tabelle 3. Relative Abweichungen der nach Formel (34) errechneten Sterbeintensität in Promille

x	(34)	x	(34)	x	(34)	x	(34)
5	0	50	0	75	-0,2	96	+ 5,0
10	0	55	0	80	-0,5	97	+ 7,0
20	0	60	0	85	-0,5	98	+ 9,2
30	0	65	0	90	+ 0,2	99	+ 12,1
40	0	70	0	95	+ 3,5	100	+ 15,4

Aus diesen Zahlen ist ersichtlich, daß (34) die Berechnung der Sterbeintensität aus den Beobachtungszahlen hinreichend genau gestattet.

Unsere nächste Aufgabe wird nun darin bestehen, die Genauigkeit der Formeln (35) bis (41) zu prüfen. Hierzu bedürfen wir der Bestände unter Risiko, die wir folgendermaßen gebildet denken.

Ausgehend von $L_0 = 1\,000\,000$ Neugeborenen berechnen wir die Todeszahlen T_x aus der Beziehung $L_x q_x = T_x$, wobei wir die Sterbewahrscheinlichkeiten q_x den Gruppenversicherungstarifen MG 1948 entnehmen und L_x mit l_x identisch erklären. In Tabelle 4 sind die Abweichungen nach den verschiedenen Formeln einander gegenübergestellt.

Tabelle 4. Relative Abweichungen der aus den Beobachtungszahlen mit Hilfe der Formeln (35) bis (41) gewonnenen μ_x in Promille

x	(35)	(36)	(37)	(38)	(39)	(40)	(41)
5	0	0	0	0	0	Kommt für diese Alter nicht in Frage, da zu umständlich gebaut.	0
10	0	0	0	0	0		0
20	0	0	0	0	0		0
30	0	0	0	0	0		0
40	0	0	0	0	0		0
50	+ 1,7	0	+ 1,7	0	0		0
60	+ 0,7	0	0	0	0		0
70	0	0	0	0	0		0
80	- 1,7	- 0,4	- 0,5	- 0,5	- 0,5		0
90	+ 0,7	- 0,2	+ 0,2	+ 0,6	+ 0,2		- 0,5
91	+ 2,2	+ 0,1	+ 0,5	+ 1,1	+ 0,6	+ 34,0 + 44,7 + 58,9 + 76,4 + 99,8 + 130,2	- 0,5
92	+ 4,1	+ 0,6	+ 0,9	+ 1,6	+ 1,1		- 0,6
93	+ 6,7	+ 1,4	+ 1,5	+ 2,1	+ 1,8		- 0,4
94	+ 10,1	+ 2,5	+ 2,4	+ 2,9	+ 2,7		- 0,1
95	+ 14,4	+ 3,8	+ 3,2	+ 3,6	+ 3,7		+ 0,2
96	+ 19,3	+ 6,0	+ 5,0	+ 4,3	+ 5,2		+ 1,3
97	+ 27,6	+ 8,9	+ 6,8	+ 5,7	+ 7,3		+ 2,7
98	+ 36,5	+ 12,7	+ 9,5	+ 5,8	+ 9,2		+ 4,8
99	+ 48,4	+ 17,6	+ 12,2	+ 6,4	+ 12,0		+ 7,3
100	+ 63,0	+ 25,4	+ 18,7	+ 4,9	+ 15,2		+ 12,9

Die Resultate der Tabelle 4 zeigen eindeutig die Überlegenheit der Formel (38). Die Abweichung der nach dieser Formel errechneten Werte erreicht ein Maximum von $6,4^{0/00}$, bleibt also unter 1%. Der große Vorteil der Formel (35) beruht in der Einfachheit ihres Aufbaues. Nachteilig wirkt sich allerdings die relativ große Abweichung in den höchsten Altersklassen aus; diese kann aber meist übersehen werden, da das zur Berechnung dieser Werte vorhandene Beobachtungsmaterial sehr klein ist und infolgedessen nur noch bedingte Gültigkeit besitzt.

Neben den erwähnten Vorzügen besitzen diese beiden Formeln (35) und (38) den Nachteil, daß sie zur Berechnung von μ_1 und μ_2 nicht geeignet sind. Für diesen Fall muß (36) verwendet werden. Aber auch diese Formel hat ihre Nachteile, indem sie nämlich einerseits verglichen mit (35) von wesentlich komplizierterer Bau-

art ist, andererseits für die höchsten Altersstufen Abweichungen ergibt, die 1% überschreiten. Diese Nachteile werden aber dadurch aufgehoben, daß sich diese Formel für alle Altersstufen verwenden läßt¹²⁾.

Klar geht aus Tabelle 4 hervor, daß sich mit (37) gegenüber (36) und ebenso mit (39) gegenüber (38) die Fehlergrenzen nicht wesentlich verbessern lassen, weshalb diese beiden, in ihrer Bauart komplizierteren Formeln (37) und (39) für die Berechnung von μ_x ausscheiden dürften.

Mit großer Deutlichkeit ist weiter aus Tabelle 4 ersichtlich, daß Formel (41) für $x \leq 98$ die Sterbeintensität außerordentlich gut approximiert, ein Resultat, das auf Grund der Untersuchungen über den Genauigkeitsgrad von (22) zu erwarten war. Für $x > 98$ allerdings befriedigt (41) im Vergleich zu (38) nicht mehr; aber auch (40) versagt gänzlich für diese hohen Altersstufen, ganz im Gegensatz zu (14). Aus diesem Grunde sowie ihres umständlichen Baues wegen werden folglich (40) und (41) für die Berechnung der Sterbeintensität aus den Beobachtungszahlen ausscheiden.

Zusammenfassend kann somit folgendes ausgesagt werden:

1. Formel (38) eignet sich für $3 \leq x \leq 100$, wenn der Fehler 1% nicht überschreiten darf.
2. Formel (36) eignet sich für $1 \leq x \leq 100$, wenn bei den höchsten Altersstufen ein Fehler von 3% in Kauf genommen werden darf.
3. Formel (35) zeichnet sich aus durch ihre große Einfachheit. Sie eignet sich für $3 \leq x \leq 100$, ergibt aber einen Fehler bis zu $6\frac{1}{2}\%$ für $x = 100$.
4. Für μ_1 und μ_2 ist durchwegs Formel (36) zu verwenden, wobei über den Fehler, der dabei begangen wird, nichts bestimmtes ausgesagt werden kann, da ein theoretischer Wert nicht bekannt ist.

¹²⁾ Ausgenommen ist die Berechnung für $x = 0$. Hierüber vgl. 3. Kapitel.

3. Kapitel. Berechnung von μ_0 aus den Beobachtungszahlen

§ 7. Ansatz

Aus den Beziehungen (9) und (34) ist ersichtlich, daß mit dem bisher entwickelten Formelapparat die Sterbeintensität für $x=0$ nicht ermittelt werden kann; die abgeleiteten Beziehungen würden formal die Kenntnis von Sterbewahrscheinlichkeiten bzw. Todeszahlen aus der Zeit vor der Geburt voraussetzen. Folglich sind wir gezwungen, einen neuen Ansatz zur Berechnung von μ_0 zu suchen. Weil für μ_0 kein theoretischer Wert bekannt ist, wird es indessen schwer fallen, den Entscheid über die Richtigkeit und den Genauigkeitsgrad des Vorgehens zu treffen.

Vorerst sei versucht, den passenden Ansatz zu gewinnen, der dann in § 8 numerisch ausgewertet und in § 9 diskutiert werden soll. In § 10 stehen sodann einige weitere Ansätze zur Diskussion.

Es ist allgemein bekannt, daß die Anzahl der Todesfälle im ersten Lebensmonat größer ist als in einem der folgenden Monate, daß sie überdies am ersten Lebenstag größer ist als an einem der folgenden Tage, und schließlich in der ersten Lebensstunde größer als in einer der folgenden Stunden.

Dies bestätigen uns die vom Eidg. Stat. Amt berechneten¹³⁾ Zahlen, welche in den Tabellen 5 bis 7 diese Sterbefälle für 1939/44 wiedergeben; dabei standen $L_0 = 185153$ neugeborene Knaben unter Risiko.

Die graphische Darstellung 1 veranschaulicht den Verlauf dieser Zahlen.

Auf Grund der bildlichen Wiedergabe sind wir versucht anzunehmen, daß die Säuglingssterblichkeit exponentieller Natur sein muß. Folglich werden wir die Sterbeintensität in den frühesten Kindesalter als Exponentialfunktion in der Gestalt

$$\mu_{0+\xi} = \mu_0 e^{-\xi} \quad (42)$$

ansetzen.

¹³⁾ Wir danken hier dem Eidg. Statistischen Amt für die freundliche Zurverfügungstellung der nötigen Unterlagen.

Tabelle 5

*Sterbefälle des ersten
Lebenstages nach
Altersstunden*

Alter in Stunden	Gestor- bene Knaben
0	1045
1	320
2	180
3	119
4	121
5	99
6	103
7	82
8—11	291
12—17	271
18—23	202
Total	2833

Tabelle 6

*Sterbefälle des ersten
Lebensmonates nach
Alterstagen*

Alter in Tagen	Gestor- bene Knaben
0	2833
1	658
2	377
3	212
4	158
5	131
6	111
7	88
8	81
9	67
10	68
11 u. m.	808
Total	5592

Tabelle 7

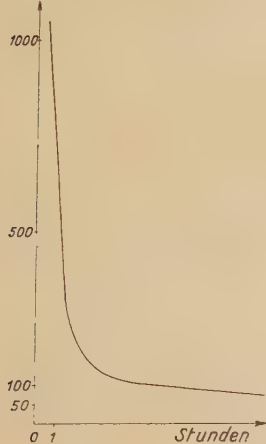
*Sterbefälle des ersten
Lebensjahres nach
Altersmonaten*

Alter in Monaten	Gestor- bene Knaben
0	5592
1	719
2	484
3	377
4	306
5	236
6	216
7	183
8	180
9	147
10	140
11	114
Total	8694

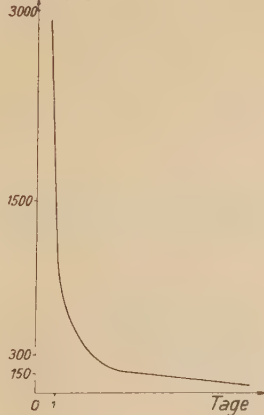
Graphische Darstellung 1: Sterbefälle des ersten Lebens-

tages nach Altersstunden monates nach Alterstagen jahres nach Altersmonaten

Todesfälle



Todesfälle



Todesfälle



Um nun eine Beziehung zwischen μ_0 und den Beobachtungszahlen zu schaffen, erinnern wir uns der Gleichung (1), die wir in der Form

$$L_{0+t} = L_0 e^{-\int_0^t \mu_0 c^\xi d\xi}$$

schreiben wollen. Diese Formel geht unter Verwendung von (42) über in

$$L_{0+t} = L_0 e^{-\int_0^t \mu_0 c^{-\xi} d\xi}$$

und bei Berechnung des Integrals in

$$L_{0+t} = L_0 e^{\frac{\mu_0}{\ln c} (c^{-t} - 1)}.$$

Wird mit (42) geeignet erweitert, so ist

$$L_{0+t} \mu_{0+t} = L_0 \mu_0 e^{\frac{\mu_0}{\ln c} (c^{-t} - 1)} c^{-t},$$

und wenn wir von 0 bis τ integrieren, so folgt die nachstehende Beziehung zwischen μ_0 und den Beobachtungszahlen

$$\int_0^\tau L_{0+t} \mu_{0+t} dt = L_0 \mu_0 \int_0^\tau e^{\frac{\mu_0}{\ln c} (c^{-t} - 1)} c^{-t} dt, \quad (43)$$

worin der Integralausdruck links die Zahl derjenigen Personen wiedergibt, die zwischen 0 und τ gestorben sind. Lediglich um die Schreibweise zu vereinfachen, werden wir

$$T(\tau)^{14)} = \int_0^\tau L_{0+t} \mu_{0+t} dt$$

setzen. So ist z. B.

$$T(1/_{8760}) = \int_0^{1/_{8760}} L_{0+t} \mu_{0+t} dt: \text{Anzahl Todesfälle der ersten Lebensstunde}$$

$$T(2/_{8760}) = \int_0^{2/_{8760}} L_{0+t} \mu_{0+t} dt: \text{Anzahl Todesfälle der ersten und zweiten Lebensstunde}$$

¹⁴⁾ Da die untere Integrationsgrenze immer mit 0 anzusetzen ist, erübrigt es sich, dies in unserem Symbol zusätzlich anzudeuten.

$T(4/12) = \int_0^{4/12} L_{0+t} \mu_{0+t} dt$: Anzahl Todesfälle der ersten vier Lebensmonate, usw.

Um (43) nach μ_0 auflösen zu können, berechnen wir zunächst das Integral

$$\mu_0 \int_0^{\tau} e^{\frac{\mu_0}{\ln c} (c^{-t} - 1)} c^{-t} dt,$$

dessen Lösung sich geschlossen in der Form

$$1 - e^{\frac{\mu_0}{\ln c} (c^{-\tau} - 1)}$$

angeben läßt, so daß (43) in der Gestalt

$$T(\tau) = L_0 \left[1 - e^{\frac{\mu_0}{\ln c} (c^{-\tau} - 1)} \right]$$

geschrieben werden kann. Durch Umformung folgt

$$\frac{\mu_0}{\ln c} (c^{-\tau} - 1) = \ln \left(1 - \frac{T(\tau)}{L_0} \right).$$

Zur Abkürzung sei

$$\ln \left(1 - \frac{T(\tau)}{L_0} \right) = \Delta(\tau). \quad (44)$$

Dann wird

$$\mu_0 = \frac{\Delta(\tau)}{c^{-\tau} - 1} \ln c. \quad (45)$$

Zur Bestimmung des Parameters c wählen wir in (43) als obere Integrationsgrenze einmal τ_1 und dann τ_2 . Damit folgt für (45)

$$\mu_0 = \frac{\Delta(\tau_1)}{c^{-\tau_1} - 1} \ln c$$

und

$$\mu_0 = \frac{\Delta(\tau_2)}{c^{-\tau_2} - 1} \ln c.$$

Die beiden Ausdrücke für μ_0 setzen wir einander gleich, also

$$\mu_0 = \frac{\Delta(\tau_1)}{c^{-\tau_1} - 1} \ln c = \frac{\Delta(\tau_2)}{c^{-\tau_2} - 1} \ln c,$$

was auf die Beziehung

$$\frac{\Delta(\tau_2)}{\Delta(\tau_1)} = \frac{c^{-\tau_2} - 1}{c^{-\tau_1} - 1} \quad (46)$$

führt. Unterwerfen wir noch die beiden oberen Integrationsgrenzen der Bedingung

$$\tau_2 = 2\tau_1$$

so läßt sich (46) schreiben als

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(\tau_2)}{\Delta(\tau_1)} &= \frac{c^{-2\tau_1} - 1}{c^{-\tau_1} - 1} = \frac{(c^{-\tau_1} - 1)(c^{-\tau_1} + 1)}{c^{-\tau_1} - 1} = c^{-\tau_1} + 1 \\ c^{-\tau_1} &= \frac{\Delta(\tau_2)}{\Delta(\tau_1)} - 1. \end{aligned} \quad (47)$$

Diesen Wert benötigen wir in (45) zur Berechnung des Nenners. Wird (47) logarithmiert, so ist zunächst

$$-\tau_1 \ln c = \ln \left(\frac{\Delta(\tau_2)}{\Delta(\tau_1)} - 1 \right)$$

und

$$\ln c = -\frac{1}{\tau_1} \ln \left(\frac{\Delta(\tau_2)}{\Delta(\tau_1)} - 1 \right). \quad (48)$$

Führen wir (47) und (48) in (45) ein, so ist μ_0 berechenbar.

§ 8. Numerische Berechnung von μ_0

Zur Vereinfachung der numerischen Berechnungen gehen wir unter proportionaler Reduktion aller Zahlen von $L_0 = 100\,000$ neugeborenen Knaben aus und nicht wie in Tabelle 5 (bzw. 6 und 7) von 185153. Die ziffernmäßigen Unterlagen sind in der folgenden Tabelle 8 enthalten.

Tabelle 8. Sterbefälle 1939/44, wenn von 100 000 Neugeborenen
ausgegangen wird

a) des ersten Lebenstages
nach Altersstunden

Alter in Stunden	Gestorbene Knaben	$T(\tau)$
0	564	
1	173	564
2	97	737
3	64	834
4	65	898
5	54	963
6	56	1017
7	44	1073
8—11	157	1117
12—17	147	1274
18—23	109	1421
Total	1530	1530

b) des ersten Lebensjahres
nach Altersmonaten

Alter in Monaten	Gestorbene Knaben	$T(\tau)$
0	3020	
1	388	3020
2	261	3408
3	204	3669
4	165	3873
5	128	4038
6	117	4166
7	99	4283
8	97	4382
9	79	4479
10	76	4558
11	62	4634
Total	4696	4696

Tabelle 9. Verlauf von μ_0 in Abhängigkeit von τ_1 und τ_2

Bei- spiel	τ_1	τ_2	$T(\tau_1)$	$T(\tau_2)$	$\Delta(\tau_1)$	$\Delta(\tau_2)$	$c^{-\tau_1}$	$\ln c$	μ_0
1	$\frac{1}{8760}$	$\frac{2}{8760}$	564	737	-0,00566	-0,00739	0,30565	$8760 \cdot 1,18530$	84,63897
2	$\frac{4}{8760}$	$\frac{8}{8760}$	898	1117	-0,00903	-0,01124	0,24474	$\frac{8760}{4} \cdot 1,40757$	36,85575
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	3020	3408	-0,03067	-0,03468	0,13075	$12 \cdot 2,03445$	0,86139
4	$\frac{5}{12}$	$\frac{10}{12}$	4038	4558	-0,04122	-0,04665	0,13173	$\frac{12}{5} \cdot 2,02699$	0,23095

Der in § 7 entwickelte Formelapparat führt zwecks Bestimmung des Parameters c auf die Notwendigkeit, zwei verschiedene obere Integrationsgrenzen τ_1 und τ_2 festzusetzen, welche der Bedingung $\tau_2 = 2\tau_1$ unterworfen sind. Die numerische Berechnung von μ_0

reagiert nun außerordentlich stark auf die Wahl dieser beiden Integrationsgrenzen, mit andern Worten, auf die Wahl der Beobachtungszahlen $T(\tau_1)$ und $T(\tau_2)$; aus der vorstehenden Tabelle 9 sind die Verhältnisse leicht zu ersehen.

§ 9. Diskussion der in § 8 berechneten vier Werte für μ_0

Das Ergebnis, dass die Wahl der beiden obern Integrationsgrenzen τ_1 und τ_2 , bzw. der Todeszahlen $T(\tau_1)$ und $T(\tau_2)$ einen entscheidenden Einfluß auf die Größenordnung des numerischen Wertes von μ_0 ausübt, kann uns keineswegs überraschen. Im ersten Beispiel wurden der Berechnung die Todeszahlen für die ersten Altersstunden des Lebens zu Grunde gelegt. (Wir wählten als obere Integrationsgrenzen $\tau_1 = \frac{1}{8760}$ und $\tau_2 = \frac{2}{8760}$). Von 100 000 Neugeborenen sterben in der ersten Stunde 564. Würde diese Sterblichkeit während des ganzen Jahres mit derselben Intensität wirken, so wären in $\frac{100\,000}{564} = 177,3$ Stunden sämtliche Neugeborenen gestorben. Da das Jahr in 8760 Stunden aufgeteilt ist, müßten im ersten Lebensjahr $\frac{8760}{177,5} \sim 50$ mal mehr Säuglinge sterben, als geboren wurden, womit μ_0 mit ~ 50 resultiert.

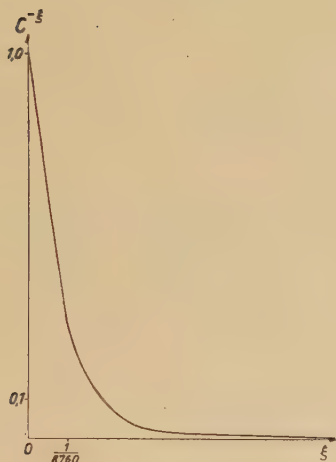
Im dritten Beispiel wurden die Berechnungen nach Maßgabe der Todeszahlen des ersten und zweiten Lebensmonates durchgeführt, indem $\tau_1 = \frac{1}{12}$ und $\tau_2 = \frac{2}{12}$ angenommen wurde. Von 100 000 Neugeborenen sterben im ersten Lebensmonat 3020. Würde diese Intensität des Absterbens das ganze Jahr hindurch andauern, so stürben im ersten Lebensjahr $12 \cdot 3020 = 36\,240$, d. h. ein Drittel aller Neugeborenen. Folglich wäre μ_0 in diesem Fall $\sim 0,33$. Daher ist es keineswegs überraschend, daß wir im ersten Beispiel für μ_0 den Wert 85, im dritten Beispiel hingegen nur 0,86 erhalten haben.

Ein Vergleich von Beispiel 1 mit 2 läßt erkennen, daß, obwohl für beide Berechnungen die Todeszahlen der Tabelle 5 (Todeszahlen für Stunden) entnommen wurden, selbst in diesem Falle noch die Wahl der obern Integrationsgrenzen über die Größenordnung von μ_0 entscheidet; ist doch der Wert für μ_0 im ersten Beispiel mehr als

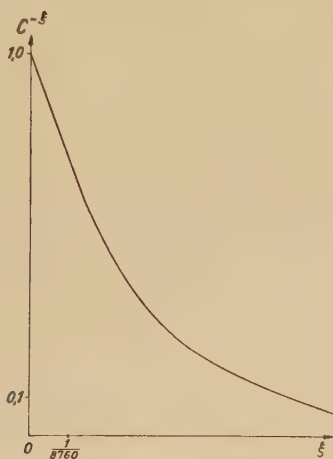
doppelt so groß als im zweiten Beispiel. Daß jedoch der in Beispiel 2 gewonnene Wert für μ_0 nicht befriedigt, leuchtet ohne weiteres ein, wenn wir den Verlauf des Parameters c graphisch auftragen.

Graphische Darstellung 2. Darstellung von $c^{-\xi}$ für

Beispiel 1



Beispiel 2



Ein Vergleich mit den graphischen Darstellungen 1 läßt sogleich erkennen, daß das erste Beispiel dem zweiten vorzuziehen ist¹⁵⁾.

Die in Beispiel 1 und 3 gewonnenen Werte hingegen sind grundsätzlich beide befriedigend; denn μ_0 ist eine Größe, die theoretisch von den Todesfällen im Nullpunkt, also praktisch von denjenigen Sterbefällen abhängt, die sich in demjenigen Zeitintervall ereignen, das dem Nullpunkt am nächsten liegt, die kleinste Dimension besitzt, und für das wir noch Todeszahlen besitzen. Dieses Zeitintervall ist für die Sterbetafeln SM 1939/44 die erste Altersstunde. Folglich ist der im Beispiel 1 errechnete Wert für μ_0 den übrigen Werten vorzuziehen. Würden beispielsweise die Sterbefälle des ersten Lebensjahres nicht nach Altersstunden, aber auch nicht nach Alterstagen ausgezählt, so wäre jenes Zeitintervall durch den

¹⁵⁾ Analog verhält sich Beispiel 3 zu Beispiel 4. Folglich befriedigt der in Beispiel 2 oder 4 gewonnene Wert für μ_0 nicht.

ersten Lebensmonat gegeben, folglich müßte für μ_0 der in Beispiel 3 angegebene Wert gewählt werden.

Die hauptsächlichsten Ergebnisse der Paragraphen 7 bis 9 lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Mit (45) ist es uns gelungen, einen Wert für μ_0 aus den Beobachtungszahlen zu berechnen. Vorerst sind die beiden obern Integrationsgrenzen mit $\tau_1 = \frac{1}{8760}$ und $\tau_2 = \frac{2}{8760}$ zu wählen. Als Folge ergibt sich

$T(\tau_1)$ = Zahl der in der ersten Lebensstunde gestorbenen

$T(\tau_2)$ = Zahl der in der ersten und zweiten Lebensstunde gestorbenen Säuglinge¹⁶⁾.

Wird $T(\tau_1)$ und $T(\tau_2)$ in (44) nacheinander eingesetzt und beachtet, daß L_0 gleich ist der Anzahl Neugeborener, so bestimmt sich $\Delta(\tau_1)$ und $\Delta(\tau_2)$, womit sich aus (47) $c^{-\tau_1}$ ermitteln läßt. Aus (48) folgt sodann $\ln c$. Wird mit (47), (48) und dem aus (44) gewonnenen $\Delta(\tau_1)$ in (45) eingegangen, so ist μ_0 berechenbar.

§ 10. Diskussion weiterer Ansätze für die Berechnung von μ_0

Wir gehen daran, weitere Methoden zur Berechnung von μ_0 zu diskutieren. Die graphische Darstellung 1 ließ erkennen, daß $\mu_{0+\xi}$ einem Exponentialgesetz folgt ohne aber weitere Ansätze exponentieller Natur auszuschließen.

Vorerst ist einzusehen, daß sich der Ansatz

$$\mu_{0+\xi} = \mu_0 e^{-b\xi}$$

mit (42) deckt. Weiter kann man sich leicht überzeugen, daß die aus (42) hervorgegangene Formel (45) aus dem Ansatz

$$L_{0+\xi} \mu_{0+\xi} = L_0 \mu_0 c^{-\xi}$$

annähernd wieder gewonnen werden kann. Wir brauchen nur von 0 bis τ zu integrieren

¹⁶⁾ Fehlen die nach Altersstunden ausgezählten Todesfälle, so ist τ_1 und τ_2 bzw. $T(\tau_1)$ und $T(\tau_2)$ dem vorhandenen Material anzupassen.

$$\int_0^{\tau} L_{0+\xi} \mu_{0+\xi} d\xi = L_0 \mu_0 \int_0^{\tau} c^{-\xi} d\xi$$

und das Integral rechts zu berechnen. Dann läßt sich diese Beziehung, wenn noch beachtet wird, daß links die Zahl der zwischen 0 und τ Gestorbenen auftritt, schreiben als

$$T(\tau) = -\frac{L_0 \mu_0}{\ln c} (c^{-\tau} - 1),$$

und wenn wir nach μ_0 auflösen,

$$\mu_0 = -\frac{T(\tau) \ln c}{L_0 (c^{-\tau} - 1)}. \quad (49)$$

Gleichung (49) läßt sich aber durch (45) approximieren. Um dies einzusehen, entwickeln wir in (45) den Ausdruck

$$\Delta(\tau) = \ln \left(1 - \frac{T(\tau)}{L_0} \right)$$

in eine Reihe und brechen beim ersten Glied ab. Dann ist

$$\Delta(\tau) = -\frac{T(\tau)}{L_0},$$

und folglich läßt sich (45) darstellen als

$$\mu_0 = -\frac{T(\tau) \ln c}{L_0 (c^{-\tau} - 1)},$$

was genau Formel (49) darstellt.

Unter den Ansätzen exponentieller Natur zur Berechnung von μ_0 scheiden weiterhin verschiedene aus; einmal ist zu nennen,

$$l_{0+\xi} \mu_{0+\xi} = l_0 \mu_0 (2 - c^\xi) \quad \text{oder} \quad \mu_{0+\xi} = \mu_0 (2 - e^{b\xi}),$$

da wir zwecks Bestimmung des Parameters c bzw. b auf transzendente Gleichungen stoßen.

Weiterhin fällt weg

$$\mu_{0+\xi} = \mu_0 c^{\xi+\epsilon} \quad (\epsilon = \text{kleine Zahl}),$$

da sich die Lösung des entstehenden Integrals nicht ohne weiteres in geschlossener Form angeben läßt.

Bei Betrachtung der graphischen Darstellungen 1 wäre auch denkbar, $\mu_{0+\xi}$ durch eine

1. Parabelfunktion wie beispielsweise $l_{0+\xi} \mu_{0+\xi} = l_0 \mu_0 (1 + a \xi + b \xi^2)$

2. Logarithmenfunktion wie beispielsweise

$$l_{0+\xi} \mu_{0+\xi} = l_0 \mu_0 [1 - a \ln(1 + \xi)]$$

3. Potenzfunktion wie beispielsweise $l_{0+\xi} \mu_{0+\xi} = l_0 \mu_0 (1 - \xi^b)$

zu approximieren. Aber sämtliche diese Funktionen haben die Eigenschaft gemeinsam, daß ihr Verlauf den Beobachtungswerten nicht nahe genug angepaßt werden kann. Außerdem lassen sich die Formeln gegenüber den in § 7 gebildeten Beziehungen in keiner Weise vereinfachen, die Parameterbestimmung vielmehr erweist sich als wesentlich umständlicher.

Wir beschränken uns darauf, diese Behauptung für die Parabelfunktion zu beweisen. (Die Ergebnisse aus der Logarithmen- und Potenzfunktion sind im wesentlichen dieselben.)

Um $\mu_{0+\xi}$ einer Parabel folgen zu lassen, setzen wir

$$\mu_{0+\xi} = \mu_0 (1 + a \xi + b \xi^2) \quad 17) \quad (50)$$

an. Führen wir jetzt in unserer Ausgangsgleichung (1), also in

$$L_{0+t} = L_0 e^{-\int_0^t \mu_{0+\xi} d\xi}$$

für $\mu_{0+\xi}$ die rechte Seite von (50) ein, so wird

$$L_{0+t} = L_0 e^{-\mu_0 \int_0^t (1 + a \xi + b \xi^2) d\xi}$$

Wird dieses Integral ausgerechnet und Formel (50) derart verwendet, daß

$$L_{0+t} \mu_{0+t} = L_0 \mu_0 (1 + a t + b t^2) e^{-\mu_0 (t + \frac{a}{2} t^2 + \frac{b}{3} t^3)},$$

¹⁷⁾ Daß der Ansatz $l_{0+\xi} \mu_{0+\xi} = l_0 \mu_0 (1 + a \xi + b \xi^2)$ annähernd zum selben Resultat führt, läßt sich mit der, bei der Exponentialfunktion angewendeten Methode analog beweisen.

so folgt, wenn wir von 0 bis τ integrieren, zwischen μ_0 und den Beobachtungszahlen die Beziehung

$$\int_0^{\tau} L_{0+t} \mu_{0+t} dt = L_0 \left[1 - e^{-\mu_0 \left(\tau + \frac{a}{2} \tau^2 + \frac{b}{3} \tau^3 \right)} \right].$$

Links in dieser Gleichung steht die Zahl der zwischen 0 und τ Gestorbenen, die wir seinerzeit mit $T(\tau)$ bezeichnet haben. Für μ_0 gewinnen wir so als Lösung

$$\mu_0 = - \frac{\ln \left(1 - \frac{T(\tau)}{L_0} \right)}{\tau + \frac{a}{2} \tau^2 + \frac{b}{3} \tau^3},$$

wofür wegen (44)

$$t = - \frac{\Delta(\tau)}{\tau + \frac{a}{2} \tau^2 + \frac{b}{3} \tau^3} \quad (51)$$

geschrieben werden kann. Die Bestimmung der Parameter geschieht nach den beiden folgenden, reichlich kompliziert gebauten Formeln

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{2} &= \frac{\Delta(\tau_2) \left[\tau_1 + \frac{b}{3} \tau_1^3 \right] - \Delta(\tau_1) \left[\tau_2 + \frac{b}{3} \tau_2^3 \right]}{\Delta(\tau_1) \tau_2^2 - \Delta(\tau_2) \tau_1^2} \\ \Delta(\tau_3) \tau_1 - \Delta(\tau_1) \tau_3 &[\Delta(\tau_1) \tau_2^2 - \Delta(\tau_2) \tau_1^2] + [\Delta(\tau_1) \tau_2 - \Delta(\tau_2) \tau_1] [\Delta(\tau_1) \tau_3^2 - \Delta(\tau_3) \tau_1^2] \\ \Delta(\tau_1) \tau_3^3 - \Delta(\tau_3) \tau_1^3 &[\Delta(\tau_1) \tau_2^2 - \Delta(\tau_2) \tau_1^2] + [\Delta(\tau_2) \tau_1^3 - \Delta(\tau_1) \tau_2^3] [\Delta(\tau_1) \tau_3^2 - \Delta(\tau_3) \tau_1^2] \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Zu dieser Parameterberechnung benötigen wir drei verschiedene obere Integrationsgrenzen τ_1, τ_2, τ_3 . Analog zu den in Tabelle 9 aufgeführten Werten reagiert auch diesmal der numerische Wert von μ_0 außerordentlich stark auf die Wahl dieser Integrationsgrenzen, was durch die Zahlen in Tabelle 10 bestätigt wird.

Aus Tabelle 10 sowie aus (52) geht deutlich hervor, daß die aus Ansatz (50) hergeleiteten Berechnungsergebnisse gegenüber den aus (42) gewonnenen Resultaten keinerlei Vorteile bieten. Zusätzlich ist zu beachten, daß die Parabel $1 + a\xi + b\xi^2$ für die Wiedergabe der Beobachtungswerte keineswegs befriedigt.

Tabelle 10. Verlauf von μ_0 in Abhängigkeit von τ_1, τ_2, τ_3

Beispiel	Wahl der obern Integrationsgrenzen			μ_0
	τ_1	τ_2	τ_3	
1	$\frac{1}{8760}$	$\frac{2}{8760}$	$\frac{3}{8760}$	76,11
2	$\frac{1}{8760}$	$\frac{2}{8760}$	$\frac{24}{8760}$	68,17
3	$\frac{1}{8760}$	$\frac{4}{8760}$	$\frac{7}{8760}$	64,54
4	$\frac{1}{8760}$	$\frac{12}{8760}$	$\frac{24}{8760}$	54,78
5	$\frac{6}{8760}$	$\frac{7}{8760}$	$\frac{8}{8760}$	29,01
6	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	0,62
7	$\frac{1}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{11}{12}$	0,45

Schließlich dürfte noch interessieren, daß auch die Forderung

$$\sum_{r=\frac{1}{8760}}^{\tau_r} \left[T(\tau_r) - \int_0^{\tau_r} L_0 \mu_0 (1 + a\xi + b\xi^2) d\xi \right]^2 = \text{Minimum}$$

unbrauchbar ist, da die resultierenden Ableitungen nach den Parametern auf komplizierte quadratische Gleichungen führen.

Wir wollen diesen Abschnitt mit einigen Extrapolationsverfahren beschließen.

Zu Beginn des dritten Kapitels ist darauf hingewiesen worden, daß mit den im ersten und zweiten Kapitel hergeleiteten Beziehungen die Sterbeintensität für $x=0$ nicht berechnet werden kann, weil dies formal die Kenntnis der Sterbewahrscheinlichkeiten, bzw. Todeszahlen aus der Zeit vor der Geburt voraussetzt. Theoretisch ließe sich allerdings zwischen μ und q wohl eine Beziehung gewinnen, welche „rückliegende“ Beobachtungswerte nicht aufweist. Durch die Transformation $x \rightarrow x + 1/2$ und $t \rightarrow -1/2$ nämlich geht (8) über in

$$\mu_x = \frac{q_{x+1/2}}{1 + \frac{1}{2} q_{x+1/2}}, \quad (53)$$

so daß sich unter Verwendung von (33) die Sterbeintensität bestimmt zu

$$\mu_x = \frac{T_{x+1/2}}{L_{x+1} + T_{x+1/2}} \quad (54)$$

und für $x=0$

$$\mu_0 = \frac{T_{1/2}}{L_1 + T_{1/2}}. \quad (55)$$

Analog zu (34) gestattet (55) die Berechnung von μ_0 nur dann, wenn die Todeszahlen nach den Altern $x+1/2$ ausgezählt vorliegen. Um μ_0 auch aus Beobachtungszahlen mit ganzzahligen Altersindizes ermitteln zu können, muß $T_{x+1/2}$ in (54) bzw. $T_{1/2}$ in (55) geeignet interpoliert werden. Zur Diskussion steht einzig die lineare Interpolation und die *Newtonsche* Interpolationsformel (10); denn die übrigen Interpolationsformeln bedingen die Kenntnis der Größe T_1 .

Wird in (54) für $T_{x+1/2}$ das arithmetische Mittel aus T_x und T_{x+1} eingeführt, so resultiert

$$\mu_x = \frac{T_x + T_{x+1}}{2 L_{x+1} + T_x + T_{x+1}} \quad (56)$$

und für $x=0$

$$\mu_0 = \frac{T_0 + T_1}{2 L_1 + T_0 + T_1}. \quad (57)$$

Verwendet man hingegen zur Darstellung von $T_{x+1/2}$ in (54) die *Newtonsche* Interpolationsformel (10), so gelangt man zu der folgenden Beziehung

$$\mu_x = \frac{3 T_x + 6 T_{x+1} - T_{x+2}}{8 L_{x+1} + 3 T_x + 6 T_{x+1} - T_{x+2}} \quad (58)$$

und für $x=0$

$$\mu_0 = \frac{3 T_0 + 6 T_1 - T_2}{8 L_1 + 3 T_0 + 6 T_1 - T_2}. \quad (59)$$

Wir haben, um eine erste Berechnung von μ_0 aus (57) bzw. (59) zu prüfen, zuerst die Todeszahlen der Tabelle 5 herangezogen; ein zweites Mal wurde μ_0 auf Grund der in Tabelle 7 aufgeführten

Beobachtungszahlen berechnet. In Tabelle 11 stellen wir die entsprechenden Werte einander gegenüber.

Tabelle 11. Verlauf von μ_0 in Abhängigkeit der Todeszahlen

μ_0 berechnet mit Formel	Den Berechnungen dienen die T_x aus	
	Tabelle 5	Tabelle 7
(57)	32,34	0,21
(59)	28,90	0,17

Den Genauigkeitsgrad obiger aus (8) auf Grund des Extrapolationsverfahrens gewonnenen Beziehungen wollen wir dadurch prüfen, daß wir in Tabelle 12 die Abweichungen der nach (54), (56) und (58) berechneten μ_x von den aus (32) gewonnenen theoretischen Werten für die Alter $x=19, 59$ und 94 einander gegenüberstellen.

Tabelle 12. Relative Abweichungen der aus (54), (56) und (58) berechneten Sterbeintensitäten in Promille

x	(54)	(56)	(58)
19	+ 16	+ 16	+ 15
59	+ 83	+ 83	+ 82
94	- 244	- 239	- 244

Wie zu erwarten war, befriedigen diese Ergebnisse keineswegs.

Eine letzte Modifikation wäre noch in dem Sinne denkbar, daß zunächst beispielsweise $\mu_{1/12}, \mu_{2/12} \dots \mu_{11/12}$ mit (36) ermittelt würde; auf μ_0 ließe aber wiederum nur mit Hilfe eines Extrapolationsverfahrens schließen.

Mit diesen Ausführungen wollen wir es bei den Berechnungen von μ_0 bewenden lassen.

Zusammenfassung

In einem Überblick über unsere Untersuchungen wollen wir kurz die hauptsächlichsten Ergebnisse zusammenstellen.

Ein erstes Kapitel machte uns bekannt mit einer Reihe Beziehungen zwischen der Sterbeintensität und der Sterbewahrscheinlichkeit, Beziehungen, deren wir bedurften, um in einem zweiten Kapitel das Hauptproblem, die Berechnung der Sterbeintensität aus den Beobachtungszahlen zu lösen. Da aber der gefundene Formelapparat die Ermittlung von μ_0 nicht gestattet, ergab sich die Notwendigkeit, in einem dritten Kapitel die Berechnung der Säuglingssterblichkeit aus den Beobachtungszahlen eingehender zu untersuchen. Die gewonnenen Formeln seien der Übersicht halber unter Angabe des Genauigkeitsgrades wie folgt zusammengestellt.

Berechnung der	Formeln mit größtem Genauigkeitsgrad		
	Alter	Formel	max. Fehler *)
Sterbeintensität aus der Sterbewahrscheinlichkeit	$x \leq 50$	$\mu_x = \frac{q_{x-1} + q_x}{2}$	0
	$50 < x \leq 95$	$\mu_x = \frac{1}{6} \left(2 \frac{q_{x-1}}{p_{x-1}} + q_{x+1} q_x + 5 q_x - q_{x+1} \right)$	0,6 ‰
	$x > 95$	$\mu_x = -2,3025851 \log \left(\frac{2 - q_{x-1} - q_x}{2} \right)$	1,1 ‰
Sterbewahrscheinlichkeit aus der Sterbeintensität	$x < 45$	$q_x = \frac{\mu_x + \mu_{x+1}}{2}$	0
	$45 \leq x \leq 80$	$q_x = 2 \frac{\mu_x + \mu_{x+1}}{4 + \mu_x + \mu_{x+1}}$ oder (30)	1,8 ‰
	$x > 80$	$\log p_x = 500 \log \left(1 - \frac{\mu_x + \mu_{x+1}}{1000} \right)$	2,2 ‰
Sterbeintensität aus den Beobachtungszahlen	$1 \leq x \leq 2$	$\mu_x = 0,125 \frac{3 T_{x-1} + 6 T_x - T_{x+1}}{L_x}$	kann nichts ausgesagt werden
	$x > 2$	$\mu_x = 0,125 \frac{3 T_x + 6 T_{x-1} - T_{x-2}}{L_x}$	6,4 ‰
	durchwegs	$\mu_x = \frac{T_{x-1/2}}{L_x}$	< 1,6 ‰

*) Für die frühesten Kindesalter läßt sich über die Fehlergröße der aufgeführten

Einfacher Bau zur numerischen Berechnung			Formel, die sich für sämtliche Altersstufen verwenden läßt	
Alter	Formel	max. Fehler *)	Formel	max. Fehler *)
$x \leq 50$	$\mu_x = \frac{q_{x-1} + q_x}{2}$	0	$\mu_x = -2,3025851 \log \left(\frac{2 - q_{x-1} - q_x}{2} \right)$	2,5 ⁰ / ₀₀
			oder	
$x > 50$	$\mu_x = 2 \frac{q_{x-1} + q_x}{4 - q_{x-1} - q_x}$	< 5%	$\mu_x = 2 \frac{q_{x-1} + q_x}{4 - q_{x-1} - q_x}$	< 5%
$x < 45$	$q_x = \frac{\mu_x + \mu_{x+1}}{2}$	0	$q_x = 2 \frac{\mu_x + \mu_{x+1}}{4 + \mu_x + \mu_{x+1}}$	< 4%
			oder	
$x \geq 45$	$q_x = 2 \frac{\mu_x + \mu_{x+1}}{4 + \mu_x + \mu_{x+1}}$	< 4%	$\log p_x = n \log \left(1 - \frac{\mu_x + \mu_{x+1}}{2n} \right)$	< 2,5 ⁰ / ₀₀
$1 \leq x \leq 2$	$\mu_x = 0,125 \frac{3T_{x-1} + 6T_x - T_{x+1}}{L_x}$	kann nichts ausgesagt werden	$\mu_x = 0,125 \frac{3T_{x-1} + 6T_x - T_{x+1}}{L_x}$	< 2,6%
			oder	
$2 < x \leq 90$	$\mu_x = 0,5 \frac{T_{x-1} + T_x}{L_x}$	1,7 ⁰ / ₀₀	$\mu_x = \frac{T_{x-1/2}}{L_x}$	< 1,6%
$x > 90$	$\mu_x = 0,125 \frac{3T_x + 6T_{x-1} - T_{x-2}}{L_x}$	6,4 ⁰ / ₀₀		
durchwegs	$\mu_x = \frac{T_{x-1/2}}{L_x}$	< 1,6%		

Formeln nichts aussagen.

Berechnung von μ_0

1. Wahl der beiden oberen Integrationsgrenzen.

Sind die Todesfälle nach Altersstunden ausgezählt, so ist $\tau_1 = \frac{1}{8760}$, $\tau_2 = \frac{2}{8760}$ zu wählen. Daraus ergibt sich $T(\tau_1)$ = Zahl der in der ersten Lebensstunde gestorbenen Säuglinge, $T(\tau_2)$ = Zahl der in der ersten und zweiten Lebensstunde gestorbenen Säuglinge. Fehlen die nach Altersstunden ausgezählten Todesfälle, so ist τ_1 und τ_2 bzw. $T(\tau_1)$ und $T(\tau_2)$ dem vorhandenen Beobachtungsmaterial anzupassen.

2. Berechnung des Parameters c .

Aus (44) folgt $\Delta(\tau_1) = \ln \left(1 - \frac{T(\tau_1)}{L_0} \right)$, $\Delta(\tau_2) = \ln \left(1 - \frac{T(\tau_2)}{L_0} \right)$, worin L_0 = Anzahl Neugeborene. Wegen (47) ist $c^{-\tau_1} = \frac{\Delta(\tau_2)}{\Delta(\tau_1)} - 1$ und wegen (48) $\ln c = -\frac{1}{\tau_1} \ln \left(\frac{\Delta(\tau_2)}{\Delta(\tau_1)} - 1 \right)$.

3. Berechnung von μ_0 aus (45)

$$\mu_0 = \frac{\Delta(\tau_1)}{c^{-\tau_1} - 1} \ln c.$$

Lebenslauf

Ich wurde als Sohn des Dr. Paul Meier, Tierarzt, und der Maria geb. Wurm am 14. August 1923 in Winterthur geboren. Heimatberechtigt bin ich in Meilen (Kt. Zürich).

Nach Besuch der Primar- und Kantonschule in meiner Geburtsstadt erwarb ich mir im Jahre 1942 das Maturitätszeugnis Typus B. Hierauf immatrikulierte ich mich an der Universität Zürich, mußte aber bereits nach einem Jahr das Studium infolge Militärdienst unterbrechen. Im Januar 1945 trat ich in die „Winterthur“ Lebensversicherungsgesellschaft ein. Im Herbst 1946 immatrikulierte ich mich von neuem an der Universität Zürich und setzte ein Jahr später meine Studien in Versicherungsmathematik an der Universität Basel fort.

Vorlesungen hörte ich bei den Herren Professoren Batschelet, Bickel, Buchner, Burckhardt, Fleckenstein, Fueter†, Furlan, Gerwig, Gürtler, Jecklin, Käfer, Lewald, Ludwig, Nevanlinna, Nolfi, Ostrowski, v.d. Pahlen, Renfer, Ruck, Saitzew†, Salin, Saxer, Speiser, Staehelin, Tschudi, Wagner und Zwinggi.

Die vorliegende Arbeit ist unter der Leitung von Herrn Professor Zwinggi entstanden. Es ist mir ein Bedürfnis, Herrn Professor Zwinggi an dieser Stelle meinen herzlichen Dank auszusprechen für seine wertvollen Anregungen sowie für das Wohlwollen, das er mir persönlich stets entgegenbrachte.

Hans-Peter Meier.

